РАБОТА № 5.
ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

Цель работы: ознакомление с методами аппроксимации функций, приобретение навыков построения интерполяционных многочленов.

5.1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть известны значения функции $f(x)$ в $n+1$ точках $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$: $f_i = f(x_i), i = 0,1,2,...,n$. Ставится задача приближенного восстановления функции f в произвольной точке $x \in [x_0, x_n]$. Обычно для решения этой задачи конструируется алгебраический многочлен (полином) P_m степени m, значения которого в точках $x_i, i = 0,1,2,...,n,$ совпадают с заданными значениями функции:

$$P_m(x_i) = f_i, \quad i = 0,1,2,...,n. \tag{5.1}$$

Такой многочлен называется *интерполяционным*, а точки $x_i, i = 0,1,2,...,n,$ называются *узлами интерполяции*. Приближенное восстановление функции f по формуле $f(x) \approx P_m(x)$ называется *интерполяцией функции* с помощью алгебраического многочлена.

5.2 ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Интерполяционный многочлен степени n, представленный в виде

$$\begin{aligned} L_n(x) = {} & f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_0-x_n)} + \\ & + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_n)} + \\ & + \ldots + f_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_{n-1})} \end{aligned} \tag{5.2}$$

называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*, аппроксимирующим (приближающим) функцию $f(x)$ на промежутке $[x_0, x_n]$.

В случае, когда $n=1$, многочлен записывается в виде

$$L_1(x) = f_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}, \tag{5.3}$$

т.е. представляет собой линейную функцию от x. Интерполяция с помощью линейной функции (5.3) называется *линейной*.

Когда $n=2$, то функция (5.2)записывается в виде

$$L_1(x) = f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + f_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)},$$

т.е. является квадратичной функцией от x.

Множители при f_i в формуле (5.2) обладают следующим свойством: их сумма равна 1 при любом x. Это свойство можно использовать для контроля правильности составления многочлена Лагранжа.

Интерполяционный многочлен Лагранжа используется не только для интерполяции функций, но и для построения формул численного дифференцирования.

Интерполяция с помощью многочлена высокой степени не всегда дает удовлетворительные результаты. Если n велико, то при увеличении аргумента характер изменения значений функции будет волнообразным; и, несмотря на выполнение условий (5.1) в узлах, интерполяционная функция может иметь значительное отклонение от аппроксимируемой кривой между узлами. Таким образом, применение интерполяционного многочлена Лагранжа оправдано лишь при небольших n.

5.2 ИНТЕРПОЛЯЦИЯ СПЛАЙНАМИ

Сплайном называется функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на рассматриваемом отрезке $[x_0, x_n]$, а на каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, является алгебраическим многочленом. Максимальная по всем частичным отрезкам степень многочленов называется *степенью сплайна*. Чаще всего для интерполяции применяются кубические сплайны.

Сплайны удобны для интерполяции на больших промежутках, так как для аппроксимации на каждом из частичных отрезков можно использовать многочлены относительно низкой степени, что позволяет избежать явно волнообразного поведения функции, характерного для случаев сглаживания большого числа эмпирических наблюдений единственным многочленом.

Рассмотрим интерполяцию функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x_n]$ кубическим сплайном. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$, построим отдельный многочлен третьей степени

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \qquad (5.4)$$

со своими коэффициентами a_i, b_i, c_i, d_i.

Коэффициенты сплайна a_i, b_i, c_i, d_i определяются из условий сшивания сплайна и аппроксимируемой функции в узлах:

$$\varphi_i(x_{i-1}) = f_{i-1}, \quad \varphi_i(x_i) = f_i, \qquad i = 1,2,...,n, \qquad (5.5)$$

и условий непрерывности первой и второй производных от сплайна в узлах:

$$\begin{aligned} &\varphi_i'(x_i) = \varphi_{i+1}'(x_i) \\ &\varphi_i''(x_i) = \varphi_{i+1}''(x_i), \quad i = 1,2,...,n \end{aligned} \qquad (5.6)$$

Кроме перечисленных условий задаются еще *краевые (граничные) условия* - условия в точках x_0 и x_n. Чаще всего это условия равенства нулю вторых производных, что соответствует свободным концам сплайна:

$$\varphi_1''(x_0) = 0, \quad \varphi_n''(x_n) = 0. \qquad (5.7)$$

Подставим функцию (5.4) в условия (5.5), (5.6), (5.7) и получим уравнения для определения коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i:

$$a_i = f_{i-1}, \tag{5.8}$$

$$a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f_i, \tag{5.9}$$

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \tag{5.10}$$

$$c_i - 3d_i h_i = c_{i+1}, \tag{5.11}$$

$$c_1 = 0, \tag{5.12}$$

$$c_n + 3d_n h_n = 0, \tag{5.13}$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Выразим коэффициенты b_i, d_i через коэффициенты c_i:

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \qquad b_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{c_{i+1} + 2c_i}{3} \cdot h_i. \tag{5.14}$$

После подстановки выражений (5.14) в соотношение (5.10) получим уравнения, в которые входят только коэффициенты c_i:

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} - \frac{f_{i-1} - f_{i-2}}{h_{i-1}}\right), \; i = 2, 3, ..., n. \tag{5.15}$$

При $i = n$, учитывая условия свободного конца сплайна, в уравнении (5.15) следует положить

$$c_{n+1} = 0. \tag{5.16}$$

Таким образом, имеем систему из $n+1$ уравнений (5.12), (5.15) и (5.16) для определения коэффициентов c_i. После решения этой системы коэффициенты b_i, d_i определяются по формулам (5.14). Коэффициенты a_i определяются по формулам (5.8).

5.3 ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Дана временная структура процентных ставок (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Вар.	**Временная структура процентных ставок**								**t^***
1	t_i, годы	0,5	1	2	3	4,5	5		1,5
	$r(t_i)$	0,04	0,03	0,02	0,04	0,05	0,06		
2	t_i, годы	1	2	3	4	5	6	7	2,5
	$r(t_i)$	0,08	0,07	0,05	0,06	0,06	0,05	0,04	
3	t_i, годы	1	2	3	3,5	4	4,5		2,5
	$r(t_i)$	0,03	0,04	0,04	0,05	0,06	0,04		
4	t_i, годы	0,5	1	1,5	2	2,5			1,25
	$r(t_i)$	0,06	0,07	0,06	0,08	0,09			
5	t_i, годы	1	2	2,5	3	4	5		3,5
	$r(t_i)$	0,02	0,03	0,04	0,03	0,05	0,06		

6	t_i, годы	1	2	3	4	5	6	6,5	2,5
	$r(t_i)$	0,07	0,06	0,05	0,04	0,05	0,06	0,08	
7	t_i, годы	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5		2
	$r(t_i)$	0,08	0,06	0,05	0,05	0,04	0,02		
8	t_i, годы	1	1,5	2	2,5	3			2,25
	$r(t_i)$	0,06	0,04	0,05	0,06	0,08			
9	t_i, годы	0,5	1	2	3	4	5	6	2,5
	$r(t_i)$	0,02	0,04	0,05	0,04	0,06	0,07	0,05	
10	t_i, годы	1	2	2,5	3,5	4,5	6		1,5
	$r(t_i)$	0,04	0,05	0,06	0,04	0,06	0,08		

Временная структура процентных ставок – это набор безрисковых процентных ставок $r(t_i)$ (доходностей чисто дисконтных облигаций), существующих на рынке в определенные моменты времени t_i. График зависимости $r(t)$ называется *кривой рыночных доходностей*.

Задание:

1. Построить кривую рыночных доходностей, используя интерполяционный многочлен Лагранжа.
2. Построить кривую рыночных доходностей, используя интерполяцию кубическими сплайнами.
3. Сравнить кривые, построенные двумя способами.
4. Определить безрисковую процентную ставку в момент времени t^*.

5.4 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Задание:

Дана временная структура процентных ставок (таблица 5.2). Построить кривую рыночных доходностей с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа и с использованием сплайн-интерполяции. Сравнить кривые, построенные двумя методами. Определить безрисковую процентную ставку в момент времени $t^* = 2{,}5$.

Таблица 5.2

t_i, годы	1	1,5	2	3	4	4,5
$r(t_i)$	0,03	0,04	0,04	0,05	0,03	0,05

Выполнение задания в программе Excel.

1. Построим кривую рыночных доходностей, аппроксимируя зависимость $r(t)$ интерполяционным многочленом Лагранжа (5.2). Так как имеется 6 узлов интерполяции, то степень многочлена равна $n = 5$, а в формуле (5.2) будет 6 слагаемых:

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С ПОМОЩЬЮ МНОГОЧЛЕНА ЛАГРАНЖА

t(i)	1	1,5	2	3	4	4,5
r(t(i))	0,03	0,04	0,04	0,05	0,03	0,05

t	r(t)
1	0,0300
1,1	0,0348
1,2	0,0377
1,3	0,0393
1,4	0,0399
1,5	0,0400
1,6	0,0398
1,7	0,0396
1,8	0,0395
1,9	0,0396
2	0,0400
2,1	0,0407
2,2	0,0416
2,3	0,0428
2,4	0,0442
2,5	0,0456
2,6	0,0469
2,7	0,0482
2,8	0,0492
2,9	0,0498
3	0,0500
3,1	0,0497
3,2	0,0489
3,3	0,0475
3,4	0,0455
3,5	0,0431
3,6	0,0403
3,7	0,0374
3,8	0,0345
3,9	0,0319
4	0,0300
4,1	0,0293
4,2	0,0303
4,3	0,0335
4,4	0,0398
4,5	0,0500

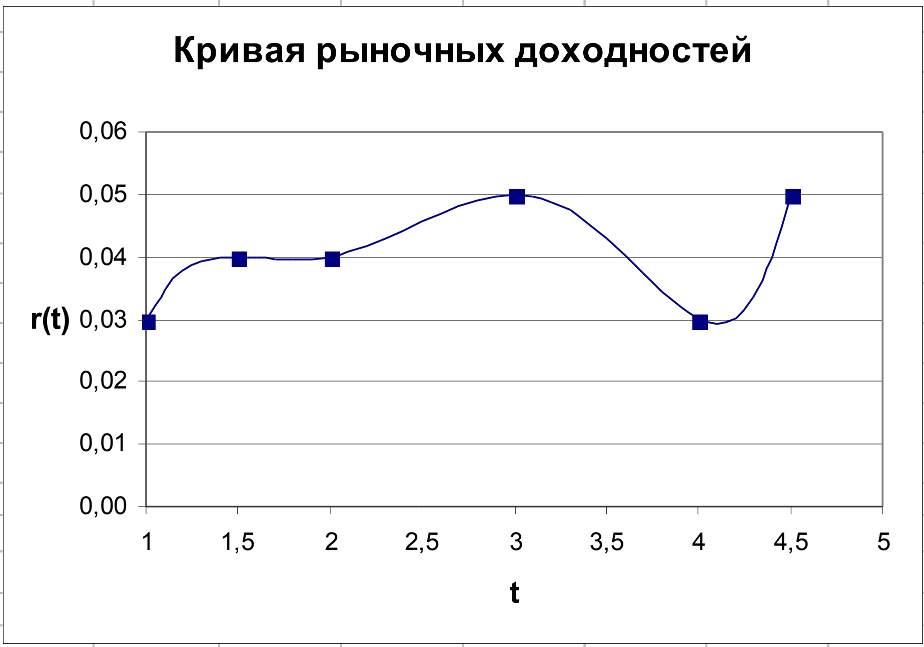


Рис. 5.1

$$L_5(t) = 0{,}03\frac{(t-1{,}5)(t-2)(t-3)(t-4)(t-4{,}5)}{(1-1{,}5)(1-2)(1-3)(1-4)(1-4{,}5)} +$$

$$+0{,}04\frac{(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-4{,}5)}{(1{,}5-1)(1{,}5-2)(1{,}5-3)(1{,}5-4)(1{,}5-4{,}5)} +$$

$$+0,04\frac{(t-1)(t-1,5)(t-3)(t-4)(t-4,5)}{(2-1)(2-1,5)(2-3)(2-4)(2-4,5)}+$$

$$+0,05\frac{(t-1)(t-1,5)(t-2)(t-4)(t-4,5)}{(3-1)(3-1,5)(3-2)(3-4)(3-4,5)}+$$

$$+0,03\frac{(t-1)(t-1,5)(t-2)(t-3)(t-4,5)}{(4-1)(4-1,5)(4-2)(4-3)(4-4,5)}+$$

$$+0,05\frac{(t-1)(t-1,5)(t-2)(t-3)(t-4)}{(4,5-1)(4,5-1,5)(4,5-2)(4,5-3)(4,5-4)}$$

После преобразований получим кривую рыночных доходностей

$$r(t)\approx L_5(t)=\frac{1}{63000}\left(316\,t^5-4096\,t^4+20105\,t^3-46670\,t^2+\right.$$
$$\left.+51549\,t-19314\right) \qquad (5.17)$$

На листе Excel зададим значения аргумента t с шагом 0,1 в одном из столбцов (рис.5.1). В соседнем столбце вычислим значения функции по формуле (5.17). Значения в узловых точках должны совпасть с исходными данными из таблицы (5.2). С помощью «точечной диаграммы» строим график кривой рыночных доходностей (рис.5.1). Точками отмечены исходные данные из таблицы (5.2) (точки – это еще одна «точечная диаграмма» в той же системе координат).

2. Построим кривую рыночных доходностей, используя сплайн-интерполяцию. Сначала дополним таблицу исходных данных вспомогательными величинами $h_i = x_i - x_{i-1},\ i=1,2,...,5$ (таблица 5.3).

Таблица 5.3

i	0	1	2	3	4	5
t_i	1	1,5	2	3	4	4,5
$r(t_i)$	0,03	0,04	0,04	0,05	0,03	0,05
h_i		0,5	0,5	1	1	0,5

Основываясь на соотношениях (5.12), (5.15) и (5.16), составим систему уравнений для определения коэффициентов c_i, $i=1,2,...,5$:

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ 0{,}5c_1 + 2c_2 + 0{,}5c_3 = -0{,}06, \\ 0{,}5c_2 + 3c_3 + c_4 = 0{,}03, \\ c_3 + 4c_4 + c_5 = -0{,}09, \\ c_4 + 3c_5 = 0{,}18 \end{cases}$$

Данную систему можно решить в программе Excel, используя процедуру «Поиск решения» (рис.5.2). По формулам (5.14) найдем коэффициенты b_i, d_i, по формулам (5.8) – коэффициенты a_i (рис.5.2).

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С ПОМОЩЬЮ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА

(i)	t(i)	r(t(i))	h(i)
0	1	0,03	
1	1,5	0,04	0,5
2	2	0,04	0,5
3	3	0,05	1
4	4	0,03	1
5	4,5	0,05	0,5

Система уравнений для определения c(i)

	Матрица коэффициентов						
(i)	c(1)	c(2)	c(3)	c(4)	c(5)	**Правая часть системы**	
1	1	0	0	0	0	0	
2	0,5	2	0,5	0	0	-0,06	-0,06
3	0	0,5	3	1	0	0,03	0,03
4	0	0	1	4	1	-0,09	-0,09
5	0	0	0	1	3	0,18	0,18
	0,00000	-0,03825	0,03301	-0,04991	0,07664	- результат Поиска решения	

Коэффициенты сплайна

(i)	a(i)	b(i)	c(i)	d(i)
1	0,03	0,02638	0,00000	-0,02550
2	0,04	0,00725	-0,03825	0,04751
3	0,04	0,00463	0,03301	-0,02764
4	0,05	-0,0123	-0,04991	0,04218
5	0,03	0,01445	0,07664	-0,05109

Рис. 5.2

Таким образом, уравнение кубического сплайна на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,2,...,5$, определено (табл.5.4).

Таблица 5.4

Интер-вал	Уравнение сплайна	a_i		b_i			c_i			d_i	
[1;1,5]	$\varphi_1(x)=$	0,03	+	0,02638	(x-1)	+	0,00000	$(x\text{-}1)^2$	+	-0,02550	$(x\text{-}1)^3$
[1,5;2]	$\varphi_2(x)=$	0,04	+	0,00725	(x-1,5)	+	-0,03825	$(x\text{-}1{,}5)^2$	+	0,04751	$(x\text{-}1{,}5)^3$
[2;3]	$\varphi_3(x)=$	0,04	+	0,00463	(x-2)	+	0,03301	$(x\text{-}2)^2$	+	-0,02764	$(x\text{-}2)^3$
[3;4]	$\varphi_4(x)=$	0,05	+	-0,0123	(x-3)	+	-0,04991	$(x\text{-}3)^2$	+	0,04218	$(x\text{-}3)^3$
[4;4,5]	$\varphi_5(x)=$	0,03	+	0,01445	(x-4)	+	0,07664	$(x\text{-}4)^2$	+	-0,05109	$(x\text{-}4)^3$

Зададим значения аргумента t с шагом 0,1 и рассчитаем значение сплайна по соответствующей формуле из таблицы 5.4 (рис.5.3). Значения в узловых точках должны совпасть с исходными данными из таблицы (5.3). С помощью «точечной диаграммы» строим график кривой рыночных доходностей (рис.5.3). В этой же системе координат точками отмечаем исходные данные.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ С ПОМОЩЬЮ КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА

t	r(t)
1	0,0300
1,1	0,0326
1,2	0,0351
1,3	0,0372
1,4	0,0389
1,5	0,0400
1,6	0,0404
1,7	0,0403
1,8	0,0400
1,9	0,0398
2	0,0400
2,1	0,0408
2,2	0,0420
2,3	0,0436
2,4	0,0454
2,5	0,0471
2,6	0,0487
2,7	0,0499
2,8	0,0507
2,9	0,0508
3	0,0500
3,1	0,0483
3,2	0,0459
3,3	0,0430
3,4	0,0398
3,5	0,0367
3,6	0,0338
3,7	0,0314
3,8	0,0298
3,9	0,0293
4	0,0300
4,1	0,0322
4,2	0,0355
4,3	0,0399
4,4	0,0448
4,5	0,0500

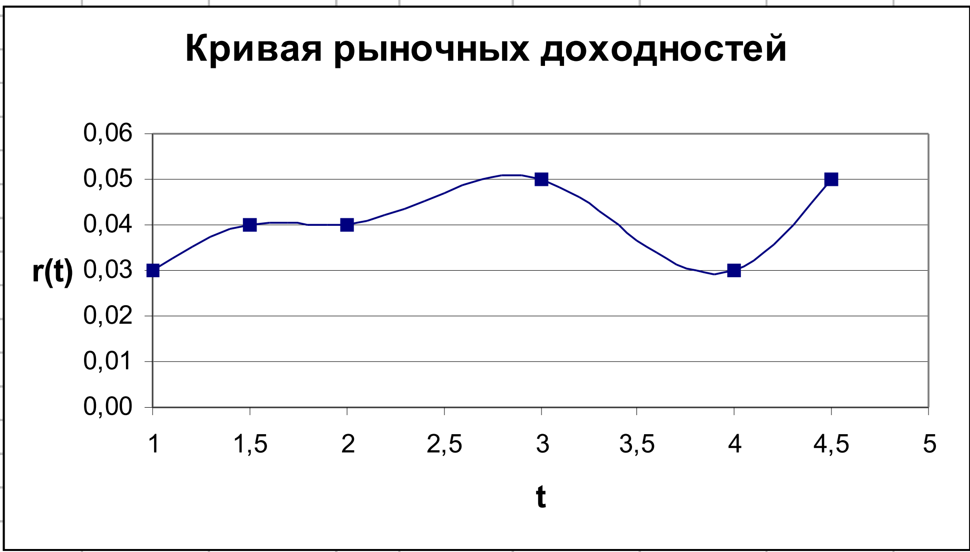
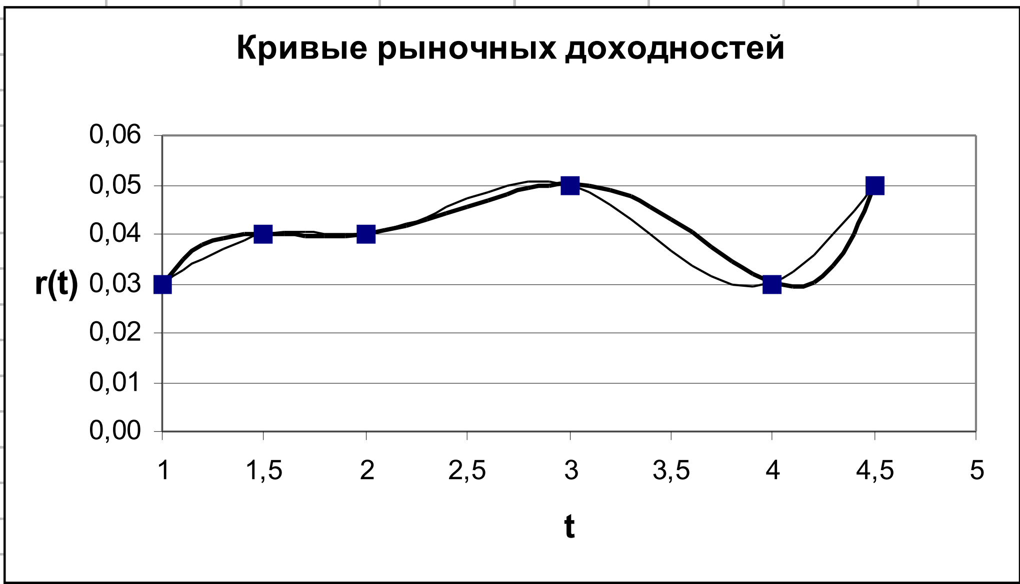


Рис. 5.3

3. Сравним кривые рыночных доходностей, построенные двумя методами. Для этого построим обе кривые в одной системе координат (рис.5.4). Точками отметим исходные данные. Очевидно, интерполяционная кривая, построенная с помощью сплайна (тонкая линия), более гладкая. Кривая, построенная с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа (жирная линия), отличается большей “волнистостью” на участках между узлами.

4. Вычислим значения функции $r(t)$ в точке $t^* = 2{,}5$ (рис. 5.4) с помощью многочлена Лагранжа и сплайн-функции. Различие в значениях начинаются уже с третьего знака после запятой.

СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ



	t*=	2,5
Многочлен Лагранжа	r(t)=	0,045571
Сплайн	r(t)=	0,047112

Рис. 5.4

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков Е.А. Численные методы.
2. Мудров А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. – Томск: МП «РАСКО», 1991.