РАБОТА №4
ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Цель работы: ознакомиться с приближенными методами интегрирования и их применением в экономике.

4.1. МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Задача вычисления интегралов не всегда может быть успешно решена с помощью нахождения первообразной. Существуют так называемые «неберущиеся» интегралы, которые определяют целый класс функций, значения которых требуются в различных приложениях, например в математической статистике. Кроме того, связь между переменными может быть задана не в виде непрерывной функции, а в дискретном виде, например, в виде таблиц. В этом случае либо сначала требуется найти функцию с помощью интерполяции, либо использовать приближенные методы интегрирования.

Методы приближенного вычисления интегралов основаны на замене подынтегральной функции интерполяционным многочленом. При этом есть два способа:1) заменить подынтегральную функцию многочленом высокой степени на всем отрезке интегрировании; 2) разбить отрезок интегрирования на мелкие части и на каждом получившемся отрезке заменить функцию многочленом невысокой степени, например, константой, частью прямой, частью параболы. Второй способ получил более широкое распространение и в зависимости от вида интерполяционного многочлена получил названия: метод прямоугольников, трапеций, парабол (Симпсона).

4.1.1. МЕТОД ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Этот метод следует из определения определенного интеграла как предела интегральных сумм, так как интегральная сумма положительной функции представляет собой сумму площадей прямоугольников, построенных на отрезках разбиения.

Рассмотрим $\int_a^b f(x)dx$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей длиной $h=\dfrac{b-a}{n}$:

$$[x_0;x_1],\ [x_1;x_2],\ \ldots,\ ,\ \ldots,\ [x_{n-1};x_n]. \qquad (4.1)$$

В каждом промежутке $[x_{i-1};x_i]$ заменим функцию на $f(x_i)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right). \qquad (4.2)$$

Так как этот метод дает большую погрешность, то он не получил широкого распространения. Но его удобно использовать когда функция задана в дискретном виде.

4.1.2. МЕТОД ТРАПЕЦИЙ

На каждом из отрезков разбиения (4.1) функция заменяется отрезком, соединяющем точки $(x_{i-1}; f(x_{i-1}))$ и $(x_i; f(x_i))$, то есть многочленом первой степени: $P_{1i}(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}(x - x_{i-1})$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} P_{1i}(x)dx = h\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right).$$

Замечание. Если функция *f(x)* положительна, то интеграл равен сумме площадей трапеций. Отсюда и название.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_0) + f(x_n)}{2}\right). \qquad (4.3)$$

Если $f''(x)$ непрерывна на [*a;b*], то погрешность метода трапеций можно оценить следующим образом

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a;b]} |f''(x)|. \qquad (4.4)$$

4.1.3. МЕТОД ПАРАБОЛ (СИМПСОНА)

Разобьем отрезок [*a;b*] на *n=2m* частей длиной $h = \frac{b-a}{2m}$. Получим точки $x_0; x_1; x_2; \ldots; x_{2i}; x_{2i+1}; x_{2i+2}; \ldots; x_{2m-2}; x_{2m-1}; x_{2m}$. Так как интерполяционный многочлен второй степени определяется тремя точками, то функция *f(x)* на каждом отрезке $[x_{2i}; x_{2i+2}]$, $i = 0, \ldots m-1$, заменяется параболой $P_{2i}(x)$, проходящей через три точки $x_{2i}; x_{2i+1}; x_{2i+2}$. Тогда приближенное значение интеграла вычисляется по формуле

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1})\right). \qquad (4.5)$$

Если производная $f^{(4)}(x)$ непрерывна на [*a;b*], то погрешность метода трапеций можно оценить следующим образом

$$\Delta \le \frac{n}{90}\left(\frac{b-a}{2m}\right)^5 \max_{x\in[a;b]} |f^{(4)}(x)|. \qquad (4.6)$$

4.2. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ В ЭКОНОМИКЕ

4.2.1. СУММАРНЫЕ И МАРЖИНАЛЬНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В экономике широкое распространение получили понятия суммарных, средних и маржинальных величин.

В роли *суммарных* величин $F(x)$ выступают: доход (выручка) и издержки как функции объема выпуска продукции, объем выпуска как функция переменного ресурса, например, затрат труда (производственная функция), полезность как функция количества потребляемого блага, функции потребления и сбережения как функции дохода населения и другие связи между экономическими показателями.

Маржинальная (или *предельная*) величина $MF(x)$ определяется как производная суммарной величины $F'(x)$ в случае, когда независимая переменная меняется непрерывно, или как отношение приращения суммарной величины к приращению независимой переменной $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ в случае, когда $F(x)$ меняется дискретно. В экономике маржинальная величина часто определяется как изменение суммарной величины, вызванное изменением независимой переменной на единицу. Обычно рассматриваются такие маржинальные величины, как предельная выручка (доход) и издержки, предельный продукт труда, предельная полезность, предельная склонность к потреблению и предельная склонность к сбережению.

4.2.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СУММАРНЫХ ВЕЛИЧИН ЧЕРЕЗ МАРЖИНАЛЬНЫЕ

Так как $MF(x) = F'(x)$, то суммарная величина определяется как $F(x) = \int MF(x)dx + c$. Для определения константы c необходимо дополнительное условие. Если в качестве первообразной функции *MF(x)* взять интеграл с переменным верхним пределом, то

$$F(x) = \int_0^x MF(x)dx + F(0) \quad \text{или} \quad F(x) = \int_{x_0}^x MF(x)dx + F(x_0) \tag{4.7}$$

Формула (4.7) полезна при приближенном интегрировании функций, а также при определении дискретных значений суммарных величин.

При этом если *x* принимает только целые значения, то

$$F(x) \approx F(0) + \sum_{i=1}^{x} MF(i) \tag{4.8}$$

Формула (4.8) соответствует приближенному вычислению интегралов методом прямоугольников (4.2).

Если в методе трапеций положить *h=1*, то

$$F(x) \approx F(0) + \sum_{i=1}^{x-1} MF(i) + \frac{MF(0) + MF(x)}{2}. \qquad (4.9)$$

Из формул (4.8),(4.9) можно получить рекуррентные соотношения

$$F(x+1) \approx F(x) + MF(x+1) \qquad (4.10)$$

$$F(x+1) \approx F(x) + \frac{MF(x) + MF(x+1)}{2} \qquad (4.11)$$

Если $h \neq 1$, то рекуррентные соотношения будут иметь вид

$$F(x+h) \approx F(x) + hMF(x+h) \qquad (4.12)$$

$$F(x+h) \approx F(x) + h \cdot \frac{MF(x) + MF(x+h)}{2} \qquad (4.13)$$

Пример 1. Д*оход (выручка).* Дана функция предельного дохода $MR(x) = R'(x)$ (здесь x – количество проданного товара). Тогда $R(x) = \int MR(x)dx + c$. Чтобы определить *c,* используется условие, что $R(0) = 0$ (если товар не продан, то выручка равна нулю). Следовательно, $R(x) = \int_0^x MR(x)dx$.

Пример 2. *Издержки.* Дана функция предельных издержек $MTC(x) = TC'(x) = (FC + VC(x))' = VC'(x)$. Здесь FC - фиксированные издержки, $VC(x)$ - переменные издержки. Тогда $TC(x) = \int MTC(x)dx + c$. Для определения константы *c* используется условие, что значение функции издержек в точке *x=0* равно значению фиксированных издержек, то есть $TC(0) = FC$. Следовательно, $TC(x) = \int_0^x MTC(x)dx + FC$.

Пример 3. *Прибыль.* Дана функция предельной прибыли $MP(x) = P'(x)$. Тогда $P(x) = \int MP(x)dx + c$. Чтобы определить *c,* используется условие, что прибыль предприятия составляет P_0 ден. ед., если продано x_0 изделий. Следовательно, $P(x) = \int_{x_0}^x MP(x)dx + P_0$.

Пример 4. *Функции потребления и сбережения.* Найти функцию потребления *C(y)*, где *y* – национальный доход, если потребление равно $C_0 > 0$, когда доход равен нулю, а функция предельной склонности к сбережению имеет вид $\frac{dS}{dy}$. Так как функции предельных склонностей к потреблению и сбережению удовлетворяют условию

$$\frac{dC}{dy} + \frac{dS}{dy} = 1, \qquad (4.14)$$

то $C(y)=\int\left(1-\frac{dS}{dy}\right)dy+c$. Для определения константы c используем условие $C(0)=C_0$. Тогда $C(y)=\int_0^y\left(1-\frac{dS}{dy}\right)dy+C_0$.

4.2.3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИРАЩЕНИЯ СУММАРНЫХ ВЕЛИЧИН ЧЕРЕЗ МАРЖИНАЛЬНЫЕ

Если независимая переменная изменилась от x_1 до x_2, то изменение суммарной величины можно вычислить по формуле $\Delta=\int_{x_1}^{x_2}MF(x)dx$.

При этом если x принимает только целые значения, то

$$\Delta F\approx\sum_{t=x_1+1}^{x_2}MF(t) \tag{4.15}$$

Формула (4.15) соответствует приближенному вычислению интегралов методом прямоугольников (4.2).

Если в методе трапеций положить $h=1$, то

$$\Delta F\approx\sum_{t=x_1+1}^{x_2-1}MF(t)+\frac{MF(x_1)+MF(x_2)}{2}. \tag{4.16}$$

Полагая $h=1$ в формуле Симпсона, получим

$$\Delta F\approx\frac{1}{3}\left(MF(x_1)+MF(x_2)+2\sum_{i=1}^{m-1}MF(x_1+2i)+4\sum_{i=0}^{m-1}MF(x_1+2i+1)\right), \tag{4.17}$$

где $x_2-x_1=2m$.

Пример 5. *Приращение прибыли.* Дана функция предельных издержек $MTC(x)=TC'(x)$ и цена одного изделия p_0. Найти приращение прибыли, если объем производства вырос от x_1 до x_2.

Прибыль предприятия вычисляется по формуле $P(x)=R(x)-TC(x)$. Так как стоимость изделия предполагается постоянной, не зависящей от объема выпуска продукции на данном предприятии, то $R(x)=p_0x$. Следовательно, предельная прибыль $MP(x)=P'(x)=p_0-MTC(x)$. Тогда приращение прибыли $\Delta P(x)=\int_{x_1}^{x_2}(p_0-MTC(x))dx$.

Пример 6. *Кривая обучения.* Пусть $T=F(x)$ – время, измеряемое, в человеко-часах, необходимое для производства первых x единиц продукции, тогда функция $f(x)=MF(x)$ называется кривой обучения и ее значение в точке x приблизительно равно времени, необходимому для производства $(x+1)$-й единицы продукции. Обычно используют функции вида $f(x)=ax^b$, где $a>0$,

$-1 \le b < 0$. Тогда $\Delta T = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ - время, необходимое для производства единиц продукции с номерами от $(x_1 + 1)$ до x_2. Среднее время, требующееся для производства единицы продукции с номерами от $(x_1 + 1)$ до x_2, равно $\tau = \frac{1}{x_2 - x_1} \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

Пример 7. *Изменение капитала предприятия.* Если *I(t)* – скорость изменения инвестиций, а *A(t)* – капитал предприятия, то $I(t) = \frac{dA}{dt}$. Тогда изменение капитала за время от t_1 до t_2 равно $\Delta A = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

4.1.4. ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ, ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВЫМИ

Пример 8. *Кривая Лоренца. Коэффициент неравномерности распределения дохода.* Кривой Лоренца называется функция
y=f(x), $0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le 1,\ y(0) = 0,\ \ y(1) = 1,$
где *y* – это доля совокупного дохода, получаемая частью *x* наиболее низко оплачиваемого населения. Кривая совершенного (равномерного) распределения доходов имеет вид *y=x*. Отклонение реального распределения доходов от идеального определяется отношением площади фигуры между прямой *y=x* и кривой Лоренца к площади, ограниченной прямыми *y=x*, *x=1* и осью *Ox*. Эта величина называется *коэффициентом неравномерности распределения доходов Джинни* и равна

$$L = 1 - 2\int\limits_0^1 f(x)dx. \tag{4.18}$$

Пример 9. *Выигрыш потребителей и поставщиков.* Пусть *p=f(x)* и *p=g(x)* кривые спроса и предложения на некоторый товар, $(x_0; p_0)$ - точка рыночного равновесия. Некоторые потребители могут заплатить за этот товар цену $p > p_0$, а некоторые поставщики могли бы продать товар по цене $p < p_0$. *Выигрышем потребителей* называется величина $C = \int\limits_0^{x_0} f(x)dx - p_0 x_0$, которая равна площади, заключенной между кривой спроса и прямой $p = p_0$. *Выигрышем поставщиков* называется величина $P = p_0 x_0 - \int\limits_0^{x_0} g(x)dx$, которая равна площади, заключенной между прямой $p = p_0$ и кривой предложения.

4.1.5. ЗАВИСИМОСТЬ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОТ ВРЕМЕНИ

Пример 10. *Определение максимума прибыли.* Даны скорости изменения издержек и дохода от времени $TC'(t)$ и $R'(t)$. Причем $TC'(t)$ возрастает, а $R'(t)$ убывает. Тогда прибыль в некоторый момент времени достигнет максимума и начнет убывать. Так как $P'(t)=R'(t)-TC'(t)$, то момент t_0 максимума прибыли определяется из соотношения $R'(t)-TC'(t)=0$, а максимальное значение прибыли определяется по формуле $P(t_0)=\int\limits_0^{t_0} P'(t)dt$.

Пример 11. *Определение объема выпуска продукции за t лет, если известна производительность труда.* Пусть *z(t)* – производительность труда в момент времени *t*. Тогда объем выпускаемой за *T* лет продукции составит $Q(t)=\int\limits_0^{t} z(t)dt$.

Пример 12. *Определение объема выпуска продукции за t лет.* Пусть дана производственная функция Кобба – Дугласа $z=b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}$, где z – величина произведенного продукта, x_1 - затраты труда, x_2 - объем производственных фондов. Если считать, что затраты труда выражаются линейной функцией времени, а затраты капитала неизменны, то производственную функцию можно представить как функцию времени следующим образом: $z(t)=(\alpha t+\beta)e^{\gamma t}$. Тогда общее количество продукта, произведенного к моменту времени t вычисляется по формуле $Q(t)=\int\limits_0^{T}(\alpha t+\beta)e^{\gamma t}dt$.

Пример 13. *Определение количества произведенного продукта с постоянным темпом прироста.* Темп прироста выпуска оборудования определяется следующим образом: $K=\dfrac{\Delta z}{\Delta t\cdot z}$, где Δz - прирост выпуска оборудования за время Δt, z – уровень его производства за единицу времени t (будем считать 1 год). Пусть на начальный момент времени уровень ежегодного производства продукта составляет z_0. Считая z непрерывной функцией времени и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим, что $(\ln z(t))'=K$. Отсюда получаем, что $\ln z(t)=\int Kdt+c$ или $\ln z(t)=Kt+c$. Для определения c подставим в эту формулу начальные условия. Тогда $c=\ln z_0$ и $\ln z(t)=Kt+\ln z_0$. Отсюда получаем $z(t)=z_0e^{Kt}$. Тогда общее количество продукта, произведенного к моменту времени t вычисляется по формуле $Q(t)=\int\limits_0^{t} z_0e^{Kt}dt$.

4.2.5. СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ЭКОНОМИКЕ

Среднее значение функции f(x) на промежутке $[a;b]$ находится по формуле $\bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Пример 14. Если задан доход в зависимости от времени $R(t)$, то среднее значение дохода на промежутке времени $[t_1;t_2]$ $\overline{R} = \dfrac{1}{t_2 - t_1}\int\limits_{t_1}^{t_2} R(t)dt$.

Пример 15. Среднее значение издержек при изменении объема производства от x_1 до x_2 равно $\overline{C} = \dfrac{1}{x_2 - x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} TC(x)dx$.

4.3. ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Задача 4.1. Найти функцию суммарной величины, если задана функция маржинальной (предельной) величины.

1. Построить график маржинальной величины. Для этого вычислить значения *MF(x)* в точках *x=1,2,3,…*.
2. Найти суммарную величину, вычисляя интеграл аналитически.
3. Вычислить значения суммарной величины в точках *x=1,2,3,…* с помощью приближенных методов интегрирования прямоугольников и трапеций, используя итерационные формулы (4.10)-(4.13) а также по точной формуле, полученной в п.2.
4. Построить графики точных и приближенных значений суммарной величины в точках *x=1,2,3,…*.
5. Сравнить полученные результаты.

Замечание. В задачах, где заданы зависимости величин от времени, суммарной величиной считать *F(t)*, а маржинальной $F'(t)$.

Задача 4.2.

1. Найти точное значение требуемой в задаче величины, вычисляя интеграл аналитически.
2. Найти приближенные значения интеграла методами трапеций и Симпсона для разных значений *h*.
3. Оценить погрешность по формулам (4.4), (4.6).
4. Найти реальную погрешность, сравнивая полученные точные и приближенные значения.
5. Сравнить полученные результаты.

4.3.1. ВАРИАНТЫ К ЗАДАЧЕ 4.1

Вариант 1. Дана функция предельного дохода $MR(x) = R'(x) = 25 - 0{,}4x - 0{,}06x^2$. Найти функцию дохода. (*Пример 1.*)

Вариант 2. Дана функция предельного дохода $MR(x) = R'(x) = 45 - 0{,}04x - 0{,}003x^2$. Найти функцию дохода. (*Пример 1.*)

Вариант 3. Дана функция предельного дохода $MR(x) = R'(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^3 + 900}}$.
Найти функцию дохода. (*Пример 1.*)

Вариант 4. Дана функция предельного дохода $MR(x) = R'(x) = (5 - x)e^{\frac{x}{5}}$. Найти функцию дохода. (*Пример 2.*)

Вариант 5. Дана функция предельных издержек $MTC(x) = TC'(x) = 50 + 0{,}02x$. Найти функцию издержек, если фиксированные издержки составляют 2500 руб. (в месяц). (*Пример 2.*)

Вариант 6. Дана функция предельных издержек $MTC(x) = TC'(x) = 60 + 0{,}04x$. Найти функцию издержек, если фиксированные издержки составляют 1800 руб. (в месяц). (*Пример 2.*)

Вариант 7. Дана функция предельных издержек $MTC(x) = TC'(x) = 60 - 0{,}04x + 0{,}003x^2$. Найти функцию издержек, если фиксированные издержки составляют 200 руб. (*Пример 2.*)

Вариант 8. Найти функцию потребления *C(y)*, если потребление равно 6 млрд. руб., когда доход равен нулю, а функция предельной склонности к потреблению имеет вид $\dfrac{dC}{dy} = 0{,}5 + \dfrac{0{,}2}{\sqrt{y}}$. (*Пример 4.*)

Вариант 9. Найти функцию потребления *C(y)*, если потребление равно 6 млрд. руб., когда доход равен нулю, а функция предельной склонности к потреблению имеет вид $\dfrac{dC}{dy} = 0{,}4 + \dfrac{1}{\sqrt{3y + 4}}$. (*Пример 4.*)

Вариант 10. Найти функцию потребления *C(y)*, если потребление равно 6 млрд. руб., когда доход равен нулю, а функция предельной склонности к потреблению имеет вид $\dfrac{dC}{dy} = 0{,}6 - e^{-3y}$. (*Пример 4.*)

Вариант 11. Найти функцию потребления *C(y)*, если потребление равно 6 4 млрд. руб., когда доход равен нулю, а функция предельной склонности к сбережению имеет вид $\dfrac{dS}{dy} = 0{,}4 - \dfrac{1}{\sqrt{2y + 9}}$. (*Пример 4.*)

Вариант 12. Найти функцию потребления *C(y)*, если потребление равно 6 4 млрд. руб., когда доход равен нулю, а функция предельной склонности к сбережению имеет вид $\dfrac{dS}{dy} = 0{,}3 + e^{-1{,}6y}$. (*Пример 4.*)

Вариант 13. Производственная функция Кобба-Дугласа имеет вид $z(t) = (t + 1)e^{3t}$. Найти функцию объема произведенной к моменту t продукции. (*Пример 12.*)

Вариант 14. На начальный момент времени уровень ежегодного производства продукта составляет 100 ед. Постоянный темп прироста 0,1. Найти функцию объема произведенной к моменту *t* продукции. (*Пример 13.*)

Вариант 15. Производительность труда рабочего в течение дня задается формулой $z(t) = -0{,}00625t^2 + 0{,}05t + 0{,}5$, где t – время в часах от начала работы, $0 \le t \le 8$. Найти функцию объема произведенной к моменту t продукции. (*Пример 11.*)

4.3.2. ВАРИАНТЫ К ЗАДАЧЕ 4.2

Вариант 1. Предприятие выпускает радиоаппаратуру, его доход задается функцией $R(t) = 40e^{0{,}25t}$, $0 \le t \le 10$. Найти среднее значение дохода в течение первых 10 лет. (*Пример 14.*)

Вариант 2. Доход от инвестиций в некоторое производство равен нулю в течение первого года, а затем задается функцией $R(t) = 10e^{-0{,}2(t-1)}$. Найти среднее значение дохода от инвестиций в течении первых пяти лет. (*Пример 14.*)

Вариант 3. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца $y = 0{,}87x^2 + 0{,}13x$. Найти коэффициент неравномерности распределения дохода. (*Пример 8*).

Вариант 4. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца $y = 0{,}96x^2 + 0{,}04x$. Найти коэффициент неравномерности распределения дохода. (*Пример 8.*)

Вариант 5. Даны скорости изменения издержек и дохода $CT'(t) = 10 + 3t^{\frac{2}{3}}$; $R'(t) = 46 - t^{\frac{2}{3}}$. Найти максимальное значение прибыли. (*Пример 10.*)

Вариант 6. Даны скорости изменения издержек и дохода $CT'(t) = 22 + 4t^{\frac{4}{5}}$; $R'(t) = 134 - 3t^{\frac{4}{5}}$. Найти максимальное значение прибыли. (*Пример 10.*)

Вариант 7. Найти прирост капитала предприятия на промежутке времени $0 \le t \le 1$, если скорость изменения инвестиций имеет вид $I(t) = 2 + 3t^{\frac{3}{5}}$. (*Пример 7.*)

Вариант 8. При покраске первых 30 автобусов было обнаружено, что кривая обучения имеет вид $f(x) = 20x^{-0{,}312}$. Сколько времени потребуется для покраски следующих 50 автобусов? (*Пример 6.*)

Вариант 9. Кривая обучения при покраске автомобилей имеет вид $f(x) = 10x^{-0{,}312}$. Найти среднее значение времени для покраски одного автомобиля, если были покрашены автомобили с номерами 401-500. (*Пример 6.*)

Вариант 10. Функция совокупных издержек производства некоторой продукции имеет вид $CT(x) = 1000 + 2x + 0{,}04x^2$. Найти среднее значение издержек при изменении объема производства от 100 до 200 единиц. (*Пример 15.*)

Вариант 11. Найти выигрыш потребителей, если законы спроса и предложения имеют следующий вид $p = f(x) = \dfrac{120}{x+2}$, $p = g(x) = \dfrac{5}{2}x + 10$. (*Пример 9.*)

Вариант 12. Найти выигрыш поставщиков, если законы спроса и предложения имеют следующий вид $p = f(x) = 44 - x^2$, $p = g(x) = x^2 + 2x + 20$. (*Пример 9.*)

Вариант 13. Найти выигрыш потребителей, если закон спроса имеет вид $p = f(x) = \dfrac{150}{2x+5}$, а равновесное количество товара равно 10. (*Пример 9.*)

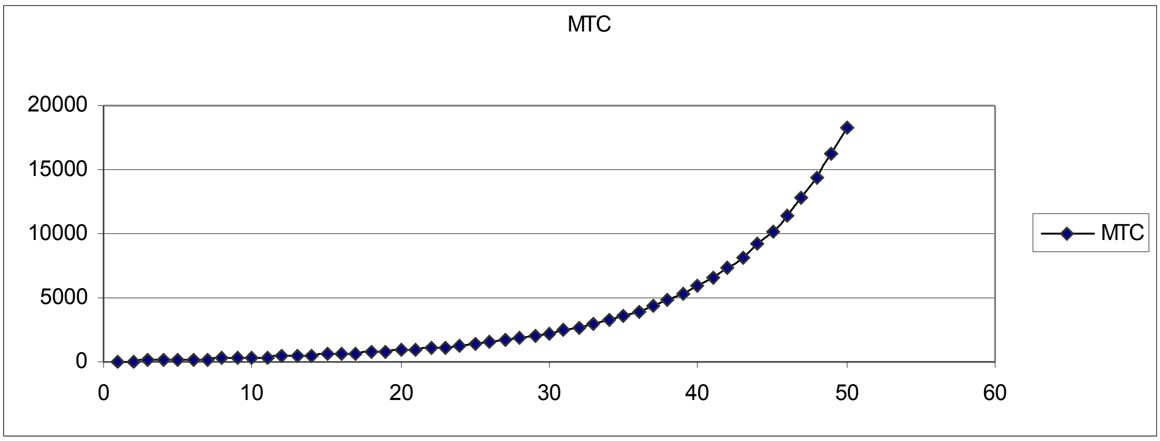
Вариант 14. Уравнение спроса на некоторую продукцию имеет вид $p = 30 - 0{,}02x$. Найти среднее значение дохода, если объем продаж возрос с 80 до 150 единиц. (*Пример16.*)

Вариант 15. Функция предельных издержек имеет вид $MTC(x) = TC'(x) = 60 + 0{,}04x$, фиксированные издержки составляют 1800 руб., а цена одного изделия составляет 80 руб. Найти приращение прибыли, ели объем производства вырос со 150 до 200 изделий. (*Пример 5.*)

4.4. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Задача 4.1. Функция предельных издержек производства некоторой продукции имеет вид $MCT(t) = 30x\,e^{0{,}001x^2}$. Найти функцию издержек, если фиксированные издержки равны 20 тыс. руб.

1. График предельных издержек имеет вид



2. Функция издержек имеет вид $TC(x) = 15000e^{0{,}001x^2} + 5000$.

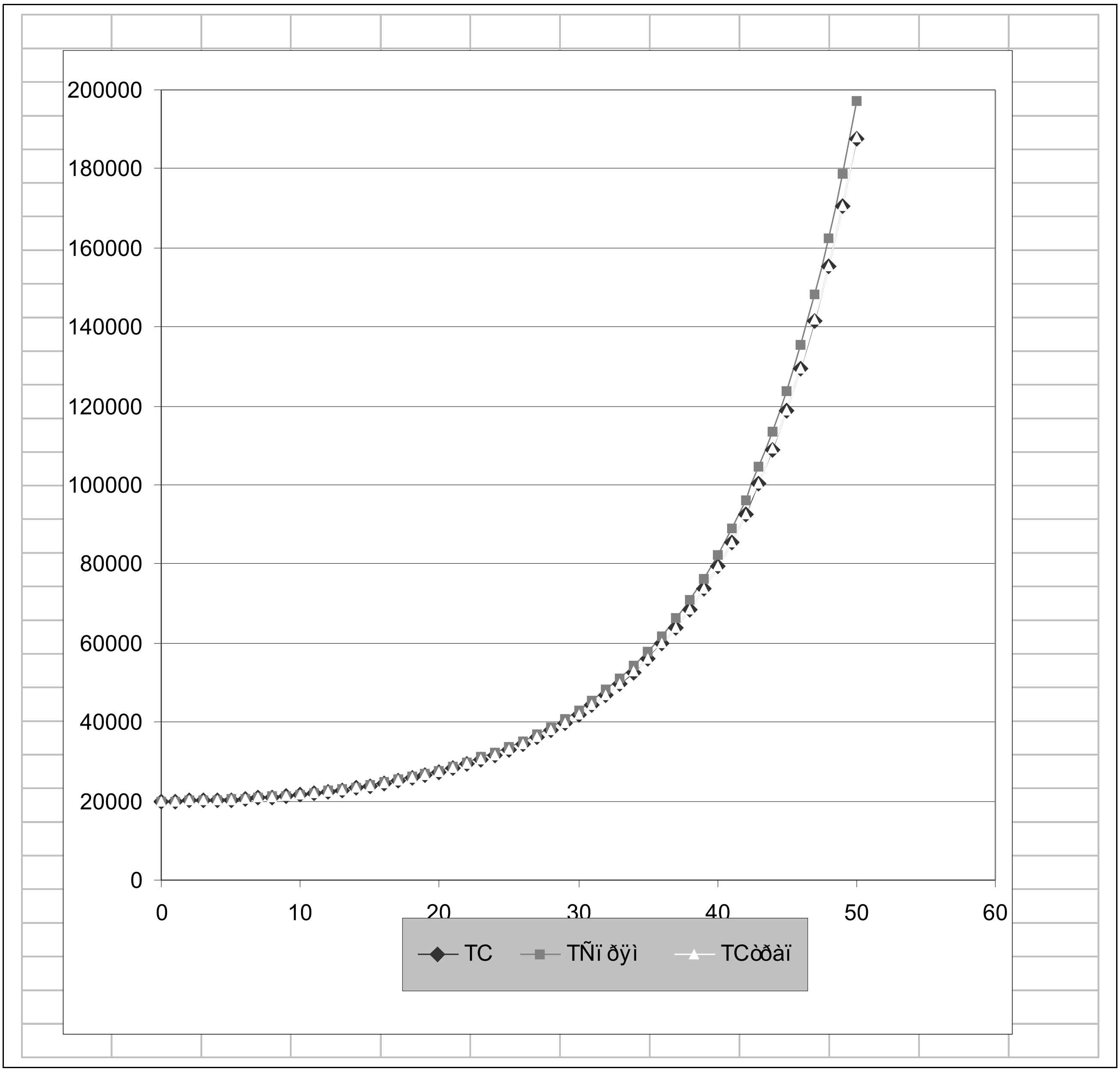
3. Таблица значений предельной и суммарной функций издержек:

x	MTC	x	TC	TCпрям	TCтрап
0	0	0	20000	20000	20000
1	30	1	20015	20030	20015

2	60	2	20060	20090	20060
3	91	3	20136	20181	20136
4	122	4	20242	20303	20242
5	154	5	20380	20457	20380
6	187	6	20550	20643	20550
7	221	7	20753	20864	20754
8	256	8	20991	21120	20992
9	293	9	21266	21413	21266
10	332	10	21578	21744	21578
11	372	11	21929	22117	21930
12	416	12	22323	22532	22324
13	462	13	22762	22994	22763
14	511	14	23248	23505	23250
15	564	15	23785	24069	23787
16	620	16	24376	24689	24379
17	681	17	25026	25370	25029
18	747	18	25740	26116	25743
19	818	19	26521	26934	26525
20	895	20	27377	27829	27382
21	979	21	28314	28808	28319
22	1071	22	29338	29879	29344
23	1171	23	30459	31050	30465
24	1281	24	31684	32331	31691
25	1401	25	33024	33732	33032
26	1533	26	34490	35266	34499
27	1679	27	36095	36945	36105
28	1840	28	37853	38785	37865
29	2017	29	39780	40802	39793
30	2214	30	41894	43016	41909
31	2431	31	44215	45447	44231
32	2673	32	46765	48120	46783
33	2942	33	49570	51061	49591
34	3241	34	52658	54302	52682
35	3574	35	56062	57877	56089
36	3947	36	59820	61824	59850
37	4364	37	63971	66187	64005
38	4831	38	68564	71018	68603
39	5355	39	73652	76373	73696
40	5944	40	79295	82317	79345
41	6606	41	85564	88923	85620

42	7353	42	92536	96276	92600
43	8196	43	100302	104472	100374
44	9149	44	108965	113621	109046
45	10228	45	118642	123849	118735
46	11451	46	129468	135300	129574
47	12840	47	141599	148140	141720
48	14420	48	155212	162560	155350
49	16220	49	170513	178781	170671
50	18274	50	187737	197054	187918

4. Приближенные и точные графики функции издержек:



5. Таким, образом, видно, что метод прямоугольников (который соответствует экономическому смыслу понятия маржинальной величины) дает большую погрешность. Метод трапеций дает более точные результаты.

Задача 4.2. Кривая Лоренца задана уравнением $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$. Найти коэффициент неравномерности дохода.

1. Коэффициент неравномерности дохода вычисляется по формуле (4.18) (пример 7):

$$L = 1 - 2\int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)dx = -1 + 2\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

Интеграл $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ вычисляется с помощью замены $x = \sin t$:

$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}$. Тогда $L = -1 + 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1 = 0.570796\ldots$

2. Найдем приближенные значения интеграла $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ при *h=0,01* и *h=0,1* по формулам (4.3),(4.5). Для этого вычислим значение подынтегральной функции в точках разбиения и подставим в формулы. Для вычисления интеграла методом Симпсона целесообразно вводить столбец коэффициентов. Например, для *h=0,1* вычисления проводятся следующим образом

x	f(x)	коэффициент
0	1.00000	1
0.1	0.99499	4
0.2	0.97980	2
0.3	0.95394	4
0.4	0.91652	2
0.5	0.86603	4
0.6	0.80000	2
0.7	0.71414	4
0.8	0.60000	2
0.9	0.43589	4
1	0.00000	1
	N5/3*СУММПРОИЗВ(O4:O14,P4:P14)	

3. Оценку погрешностей по формулам проводить не будем, так как производные не существуют в точке *x=1*.

4. Найдем разности между приближенными значениями и точным.

5. Полученные результаты поместим в таблицу:

	h=0,01		*h=0,1*	
	интеграл	коэффициент	интеграл	коэффициент
точное значение	0.78540	0.57080	0.78540	0.57080
метод трапеций	0.78510	0.57021	0.77613	0.55226
метод парабол	0.78528	0.57057	0.78175	0.56350
погрешность метода трапеций	-0.00029	-0.00059	-0.00927	-0.01854

погрешность метода парабол	-0.00011	-0.00023	-0.00365	-0.00729

Таким образом, видно, что погрешность метода Симпсона меньше, чем погрешность метода парабол.

ЛИТЕРАТУРА

1. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник/ Под ред. В.И. Ермакова. – М: ИНФРА-М, 1999.
2. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие/ Под ред. В.И. Ермакова. – М: ИНФРА-М, 2001.
3. Высшая математика для экономистов: Учебник/ Под ред. Н.Ш. Кремера. – М: ИНФРА-М, 2004.
4. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Издательство «ДИС», 1998.